

Problème 072 – Un nombre Miraculous

Niveau : Troisième (Quatrième en admettant le résultat de la Partie B.2))
Chapitres : Théorème de Pythagore, Constructions géométriques, Identités remarquables
Publié le 27/11/2019



Série franco-coréenne qui peut être regardée dès 7 ans (mais appréciée par des fans de tout âge!), la série « Miraculous, les aventures de Ladybug et Chat Noir » raconte l'histoire de deux adolescents de 14 ans, Marinette et Adrien, qui se transforment en deux super héros, Ladybug et Chat Noir, pour protéger Paris des akumas, des papillons maléfiques qui transforment les gens en vilains.

Parmi les personnages, on trouve Nino Lahiffe, le meilleur ami d'Adrien. Dans un épisode de la saison 1, « Numéric », on surprend Nino en train de lire un manuel de mathématiques, sur lequel on peut deviner de curieuses écritures. L'une d'elle, en bas à droite du livre en question

(voir **Image 1**), laisse deviner un nombre pour le moins très particulier : $\sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{8}}$.



Image 1 – Nino Lahiffe dans l'épisode « Numéric »

On pourrait légitimement se demander dans quelles circonstances un tel nombre apparaîtrait ! Pour répondre à cette question, nous allons justement dans ce problème suivre un programme de construction qui nous va nous permettre de tracer un segment qui aura pour longueur exacte : $\sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{8}}$.

Dans la **partie A**, on réalise la construction géométrique qui permet de construire un segment de cette longueur et dans la **partie B**, on justifie cette construction.

Partie A – Construction géométrique

La construction peut être faite à partir des points de départ donnés en **Annexe**, ou être réalisée à l'aide d'un logiciel de géométrie, par exemple Geogebra.

Sur le document en **Annexe**, on a placé trois points A, B, C tels que : $AB = AC = 1$ et $[AB]$ est perpendiculaire à $[AC]$.

- 1) Placer le point D, symétrique de A par rapport à C.
- 2) Tracer la droite (BD).
- 3) Placer le point E sur [BD) tel que $DE = 3$.
- 4) Placer le point M, milieu de [BE].
- 5) Placer le point N, milieu de [MB].
- 6) Placer le point P, milieu de [NB].
- 7) Placer le point R sur (BD) tel que $BR = 1$, avec R n'appartenant pas à [BD].
- 8) Placer le point S, milieu de [PR].
- 9) Tracer le cercle (c) de centre S et de diamètre [PR].
- 10) Tracer la droite perpendiculaire (d) à (BD) passant par B.
- 11) Placer T, une des deux intersections de (d) avec le cercle (c).

La longueur BT obtenue est de longueur $\sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{8}}$.

Partie B – Justification de la construction

1) On démontre d'abord que les étapes 1) à 6) nous amènent à tracer un segment de longueur : $\frac{3+\sqrt{5}}{8}$.

- a) Justifier que $AD = 2$.
- b) Démontrer que $BD = \sqrt{5}$.
- c) En déduire que $BE = 3 + \sqrt{5}$.
- d) Que cherche-t-on à faire dans les étapes 4) à 6) de la construction ?
- e) En déduire que $PB = \frac{3+\sqrt{5}}{8}$.

2) On montre que les étapes 7) à 11) nous permettent de tracer un segment dont la longueur est la racine carrée de la longueur du segment PB. On pose $PB = x$.

- a) Montrer que le cercle (c) de centre S a pour rayon $\frac{x+1}{2}$.
- b) En comparant les distances PB et PS, justifier que S est bien un point du segment [BR].
- c) Montrer alors que $BS = 1 - \frac{x+1}{2}$, puis que $BS = \frac{1-x}{2}$.
- d) En utilisant le théorème de Pythagore dans le triangle SBT, démontrer que $BT^2 = x$, et donc que $BT = \sqrt{x}$.
- e) En conclure que la longueur du segment BT est celle recherchée.

Annexe

